

# Modelle ebener hyperbolischer Geometrien I und II

von  
S. K. Grosser, Wien

## § 1 Einleitung

Der Inhalt der folgenden sehr kurzen schriftlichen Darbietung beschreibt die beiden Vorträge, die der Autor anlässlich der Lehrerfortbildungstagungen 1994 und 1995 gehalten hat. Sie sind so eng miteinander verknüpft, daß eine inhaltliche Trennung keinerlei Vorteil bringen würde.

Gegenstand dieser Ausführungen waren vier Modelle ebener hyperbolischer Geometrien und ihre Beschreibung durch geeignete Computer-Programme, die in einer wissenschaftlichen Kooperation zwischen der Arbeitsgruppe des Autors und einer Fachabteilung der SIEMENS AG ÖSTERREICH (Dr. P. Hrandek) entstanden sind. Im Grunde sind die dabei hergestellten Programme noch allgemeiner – sie umfassen auch ein sphärisches und ein projektives Modell (siehe [GR]), aber hier wird nur Anteil an hyperbolischer ebener Geometrie beschrieben. Der Großteil der notwendigen Programmierarbeit wurde von Mag. G. Hippmann geleistet; eine dafür notwendige Mathematik-Oberfläche für WINDOWS stammt von Mag. J. Grassberger. Nähere Details über die Programme werden in §6 dargelegt.

Hauptgegenstand der Erörterungen in diesem Artikel sind vier Standardmodelle von  $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ , die hier der Bequemlichkeit halber – und einigermaßen im Sinne der Tradition – mit den Namen ihrer Erfinder (Lobachevsky, Klein, Poincaré, Weierstraß) als  $\mathbb{H}_L^2$ ,  $\mathbb{H}_K^2$ ,  $\mathbb{H}_P^2$ ,  $\mathbb{H}_W^2$  charakterisiert werden.<sup>1</sup>

Schon ein Blick auf die Trägermengen dieser Modelle zeigt von ihrer (äußerlichen) Verschiedenheit:

- (1) Für  $\mathbb{H}_L^2$  ist das das Innere des Einheitskreises der Ebene mit der in § 2 ange deuteten Distanzfunktion.
- (2) Für  $\mathbb{H}_K^2$  ist es ebenfalls das Innere des Einheitskreises, aber mit einer anderen Distanzfunktion.
- (3) Für  $\mathbb{H}_P^2$  ist es die obere (begrenzte) Halbebene der komplexen Ebene mit einer gewissen nicht-euklidischen Distanzfunktion.
- (4) Für  $\mathbb{H}_W^2$  ist es die obere Hälfte des 2-schaligen Hyperboloids  $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2 - 1$  im  $(x_1, x_2, x_0)$ -Raum (also dann  $\mathbb{R}^3$ ) mit einer gewissen nicht-euklidischen Distanzfunktion.

Nun gehören zu einer Geometrie im Sinne von Felix Klein ja nicht nur die Objekte, die das Interesse des Geometers fesseln – die Punkte, Geraden, Dreiecke, Polygone etc. – sondern jeweils auch die zugehörige Klein'sche Gruppe ( $G(\mathbb{H}_L^2)$ ,  $G(\mathbb{H}_K^2)$ ,  $G(\mathbb{H}_P^2)$ ),

---

<sup>1</sup>Hier muß der Leser darauf hingewiesen werden, daß diese Bezeichnungen in der internationalen Literatur durchaus „variabel“ gehandhabt werden und daß der Name „Weierstraß“, durch die Verwendung von [RE] angeregt wurde.

$G(\mathbb{H}_W^2)$ ) von Transformationen („Isomorphismen“), welche diese Objekte der Geometrie ineinander überführen und darüber hinaus auch die (hyperbolische) Distanz zwischen Punkten bewahren. In der Beschreibung dieser Gruppen offenbart sich am stärksten die äußerliche Verschiedenheit bzw. die historische Entwicklung dieser Modelle, die nichtsdestoweniger ja trotzdem paarweise in einem sehr starken Sinn, zueinander isomorph sind. Die Gruppen sind, grob gesprochen, die folgenden:

- (1)  $G(\mathbb{H}^2)$  ist eine Gruppe von linear gebrochenen Transformationen der  $z$ -Ebene,

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \text{ wo } ad - bc \neq 0 \text{ bzw. ihrer „Konjugierten“}$$
$$w = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \text{ wo } ad - bc \neq 0 .$$

- (2)  $G(\mathbb{H}_K^2)$  ist eine Gruppe von birationalen Transformationen

$$(u, v) = \left( \frac{p_1(x, y)}{g_1(x, y)}, \frac{p_2(x, y)}{g_2(x, y)} \right) \text{ der Ebene } \mathbb{R}^2, \text{ wo } p_1, g_1, p_2, g_2 \text{ Polynome 2. Grades sind.}$$

Alternativ kann  $\mathbb{H}_K^2$  als die Gruppe der projektiven linearen Transformation der projektiven Ebene  $P^2(\mathbb{R})$  angesehen werden, welche den Einheitskreis in sich abbilden.

- (3)  $G(\mathbb{H}_P^2)$  ist eine ähnlich definierte Gruppe wie die in (1).

- (4)  $G(\mathbb{H}_W^2)$  ist eine Gruppe von reellen  $3 \times 3$ -Matrizen (also eine lineare Gruppe), welche die quadratische Form  $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2$  konstant gleich  $-1$  lassen.

Daß diese so verschiedenen Beschreibungen gehorchenden Gruppen ebenfalls paarweise isomorph sind, ist ein überraschendes Moment, das die mathematische Tiefe dieser Begriffsbildungen deutlich macht. Ist  $\alpha : \mathbb{H}^2(M_1) \rightarrow \mathbb{H}^2(M_2)$  einer der oben erwähnten Isomorphismen zwischen den Modellen  $M_1$  und  $M_2$ , dann ist  $\tilde{\alpha} : G(\mathbb{H}^2, (M_2)) \rightarrow G(\mathbb{H}^2, (M_1))$ , definiert durch  $\varphi \mapsto \alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$  der zugehörige Isomorphismus der Gruppen dieser Modelle.

In der elementaren Lehrbuchliteratur über hyperbolische Räume findet sich keinerlei Hinweis auf die Topologie, mit der die Gruppe  $G(\mathbb{H}^2(M))$  des Modells  $M$  auszustatten ist. Da es sich um Transformationsgruppen eines jeweils lokal-kompakten Raumes handelt, kommt hier nur die lokal-offene Topologie in Frage, wobei allerdings die Stetigkeit der Operation  $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$  auf jeder dieser Gruppen nachzuweisen ist. Konkret bedeutet das, daß z.B. auf der Matrizen­gruppe  $G(\mathbb{H}_W^2)$  nicht die übliche Topologie (des  $\mathbb{R}^9$ ) zu verwenden wäre, Details werden in [HI] ausgearbeitet sein. Mit diesem Proviso werden die Gruppen der genannten Geometrien von topologischen Gruppen und die Isomorphismen  $\tilde{\alpha}$  zu topologischen, also auch Homöomorphismen.

Aus den insgesamt angeführten Argumenten genügt es, eines der erwähnten Modelle genauer, die anderen nur etwas flüchtiger, zu beschreiben. Dafür wird im folgenden  $\mathbb{H}_L^2$  ausgewählt.

## § 2 Das Modell $\mathbb{H}_L^2$

Die Grundmenge ist der offene Einheitskreis in der (komplexen)  $z$ -Ebene:  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} =: HE$  (*hyperbolische Ebene*).

Die *Punkte* dieser Geometrie sind die Punkte des offenen Einheitskreises, die *Geraden* sind die Durchmesser und jene Bögen von Orthogonalkreisen zum Einheitskreis, die innen liegen. Aus Punkten und Geradensegmenten können *Dreiecke*, *Vierecke* und *allgemeinere Polygone* gebildet werden.

**Satz 1.** Durch je zwei verschiedene Punkte  $A, B$  in  $HE$  existiert genau eine Gerade.

Um den Distanzbegriff in diesem Modell würdigen zu können, benötigt man weitere Hilfsmittel aus der Komplexen Funktionentheorie bzw. der linearen Algebra. Diese sind in den folgenden Sätzen und Definitionen skizziert.

DN. Das *Teilverhältnis*, in dem der Punkt  $A$  die Strecke  $ST$  teilt, ist durch

$$TV(S, T; A) := \frac{\overline{AS}}{\overline{AT}} = \frac{|A - S|}{|A - T|}$$


gegeben. Es gilt  $0 \leq TV \leq \infty$ .

DN. Das *Doppelverhältnis* (projektiv), in dem das Punktepaar  $A, B$  die Strecke  $ST$  teilt, ist durch

$$DV(S, T; A, B) := \frac{|A - S||B - T|}{|A - T||B - S|} = \frac{TV(S, T; A)}{TV(S, T; B)}$$

gegeben. Es gilt  $0 \leq DV \leq \infty$ .



DN. Das *Doppelverhältnis* (komplex) der Punkte  $A, B$  der komplexen Ebene in bezug auf das Punktepaar  $S, T$  ist durch

$$\widetilde{DV}(S, T; A, B) := \frac{(A - S)(B - T)}{(A - T)(B - S)}$$

gegeben. Es gilt  $\widetilde{DV} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

**Satz 2.**  $\widetilde{DV}(S, T; A, B) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow S, T, A, B$  liegen auf einem Kreis oder auf einer Geraden.

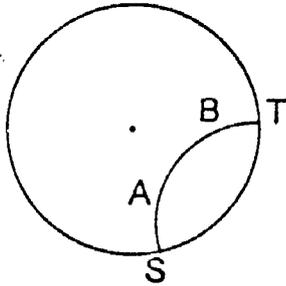
**Satz 3.** Sei  $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  (mit  $ad - bc \neq 0$ ) eine Möbius-Transformation und seien  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , vier verschiedene Punkte der um  $\infty$  erweiterten  $z$ -Ebene. Falls  $w_j = f(z_j)$ ,  $1 \leq j \leq 4$ , dann gilt  $\widetilde{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \widetilde{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ .

**BEMERKUNG.** Falls  $S, T, A, B$  in  $\mathbb{R}$  liegen, gilt  $DV = |\widetilde{DV}|$ .

DN. Die *Distanz* der Punkte  $A$  und  $B$  (im Inneren des Einheitskreises) sei durch

$$d(A, B) := |\log DV(S, T; A, B)|$$

gegeben, wo  $S, T$  die in der Skizze markierten Punkte auf dem Einheitskreis sind.



Es gelten die Regeln:

$$d(A, B) \geq 0; \quad d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$d(A, B) = d(B, A)$$

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

Mit dieser Distanz wird die hyperbolische Ebene  $HE$  zu einem metrischen Raum. Es folgt nun eine Kurzbeschreibung der Klein'schen Transformationsgruppe  $G(\mathbb{H}_L^2)$  dieser Geometrie. Sie besteht aus allen Transformationen der beiden folgenden Arten:

$$w = \mu(z) = \frac{az+b}{bz+a} \text{ mit } a\bar{a} - b\bar{b} = 1$$

und

$$w = \mu(\bar{z}) = \frac{a\bar{z}+b}{b\bar{z}+a} \text{ mit } a\bar{a} - b\bar{b} = 1$$

Erstere sind Möbius-Transformationen, letztere werden durch Vorschaltung einer Spiegelung ( $z \mapsto \bar{z}$ ) aus ihnen erhalten. Im speziellen gehören folgende Transformationen zu dieser Gruppe:

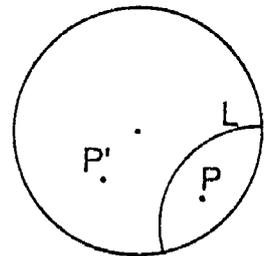
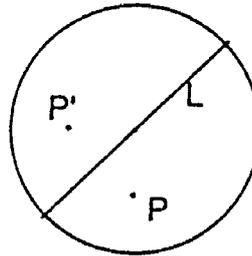
Rotationen  $O$ :

$$w = e^{i\varphi} z$$

Translationen ( $z_0 \mapsto 0$ ):

$$w = -\frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$$

Spiegelungen an  $L$ -Geraden:



(Die zweite Spiegelung stellt eine Spiegelung  $P \mapsto P'$  am Orthogonalkreis dar). Diese Transformationen sind zahlreich genug, wie folgt.

**Satz 4.** Zu  $P, Q$  in  $HE$  existiert ein  $\alpha \in G$ , so daß  $\alpha(P) = Q$ .

**Satz 5.** Zu  $L$ -Geraden  $g, h$  existiert  $\alpha \in G$ , so daß  $\alpha(g) = h$ .

DN. Der Winkel zwischen den Geraden  $g$  und  $h$  in  $HE$  ist der euklidische ("gewöhnliche) Winkel zwischen den beiden Kurven in ihrem Schnittpunkt.

**Satz 6.** Für die Winkelsumme im Dreieck gilt  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .

### Trigonometrie auf $\mathbb{H}^2$ .

Im rechtwinkligen hyperbolischen Dreieck gelten:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b = \cot \alpha \cot \beta$$

$$\tanh a = \tan \alpha \sinh b = \tanh c \cos \beta$$

$$\tanh b = \tan \beta \sinh a = \tanh c \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \cosh b = \cos \beta$$

Im *allgemeinen* hyperbolischen Dreieck gelten:

*Sinussatz:*  $\sinh a : \sinh b : \sinh c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

1. *Cosinussatz:*  $\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$

2. *Cosinussatz:*  $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c$

Dreiecksgeometrie auf  $\mathbb{H}_L^2$ . (In der zitierten Literatur nur in Andeutungen vorhanden)

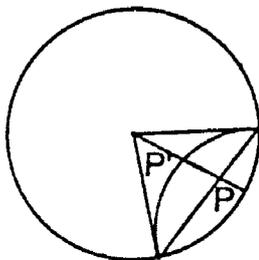
Ein euklidischer Kreis um  $O$  ist auch ein hyperbolischer. Da die Transformationen aus  $G$  solche Kreise bewahren (nicht aber ihre Mittelpunkte!), existieren hyperbolische Kreise um jeden Punkt (und sind euklidische Kreise).

Für Dreiecke existieren Schwerlinien, Höhen, Seitensymmetralen. Es existiert der Inkreismittelpunkt  $I$ , manchmal der Höhenschnittpunkt  $H$ , manchmal der Umkreismittelpunkt  $U$ . Es gibt keine Euler-Gerade.

Ferner gibt es andere interessante Kurven: Grenzkreise, Abstandslinien etc.

### § 3 Das Modell $\mathbb{H}_K^2$

Die Trägermenge von  $\mathbb{H}_K^2$  ist ebenfalls der offene Einheitskreis. Die *Punkte* des Modells sind diese Punkte, die *Geraden* sind euklidische (also „gewöhnliche“) Sehnen dieses Kreises (ohne die Endpunkte). Damit sind Dreiecke, Vierecke und Vielecke definiert.



Die Winkel zwischen zwei Geraden  $g$  und  $h$  sind aber nicht die euklidischen. Um sie richtig definieren zu können, ist es einfacher, eine Abbildung  $\Phi_{K,L} : \mathbb{H}_K^2 \rightarrow \mathbb{H}_L^2, \Phi(P) := P'$  gemäß der nebenstehenden Zeichnung zu verwenden. Man kann sich überzeugen, daß  $\Phi$  die besondere Eigenschaft hat, die gesamte Sehne durch  $P$  auf den Kreisbogen durch  $P'$  abzubilden.

Ersetzt man nun die Geraden  $g$  und  $h_L$  aus  $\mathbb{H}_K^2$ , deren Bilder unter  $\Phi$  damit Geraden  $g'$  und  $h'$  in  $\mathbb{H}_L^2$  sind, durch letztere, so ist als Winkel zwischen  $g$  und  $h$  der euklidische Winkel zwischen  $g'$  und  $h'$  zu nehmen. Die Winkel eines Dreiecks in  $\mathbb{H}_K^2$  sind also die Winkel des durch  $\Phi_{K,L}$  eindeutig zugeordneten Dreiecks in  $\mathbb{H}_L^2$ .

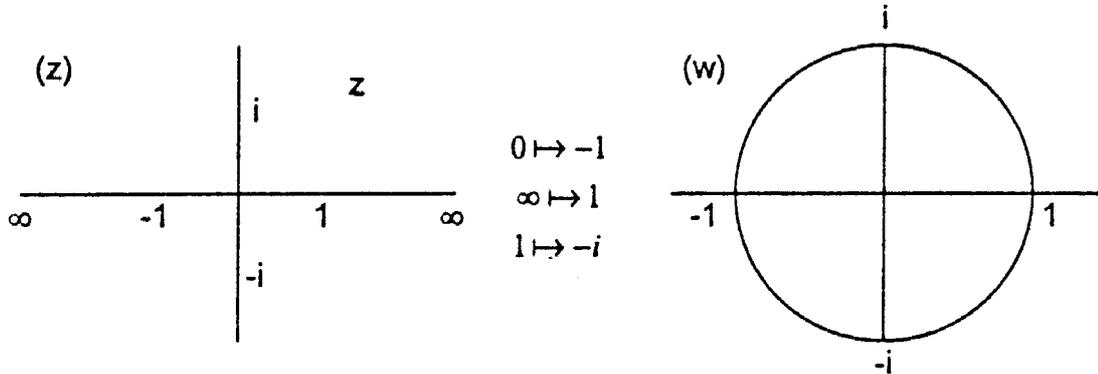
Gemäß den in § 1 gemachten Erörterungen läßt sich mit Hilfe dieses Isomorphismus  $\Phi_{K,L}$  auch die Gruppe  $G(\mathbb{H}_K^2)$  ermitteln. Unabhängig von diesen Überlegungen kann letztere auch aus den (bisher nicht erwähnten) Axiomen für die hyperbolische Ebene als die Gruppe jener projektiven linearen Isomorphismen der euklidischen Ebene beschrieben werden, welche das Innere des Einheitskreises auf sich selbst abbilden. Daher sind die Beschreibungen geometrischer Objekte und die Darstellung von Sachverhalten im Modell  $\mathbb{H}_K^2$  traditionell eher in die Sprache und Methodik der projektiven

linearen Geometrie eingekleidet.

Für die Geometrie und Trigonometrie in  $\mathbb{H}_K^2$  gelten also die zu den in § 1 dargestellten Sachverhalten bzw. Sätzen analogen Sachverhalte und Sätze.

### § 4 Das Modell $\mathbb{H}_P^2$

Die Grundmenge ist die (von der  $x$ -Achse berandete) offene obere Halbebene der  $z$ -Ebene. Durch die Abbildung  $w = \frac{z-i}{z+i}$  wird die offene Halbebene in das Innere des Einheitskreises und die  $x$ -Achse auf den Einheitskreis abgebildet; denn wenn  $z$  in der oberen Halbebene liegt, ist der Abstand von  $z$  zu  $i$ , also  $|z - i|$ , kleiner als der Abstand von  $z$  zu  $-i$ , also  $|z - (-i)|$ , so daß in diesem Fall  $|w| < 1$  gilt. Für  $z$  auf der  $x$ -Achse sind diese Abstände gleich, also  $|w| = 1$  Dazu ein Bild:



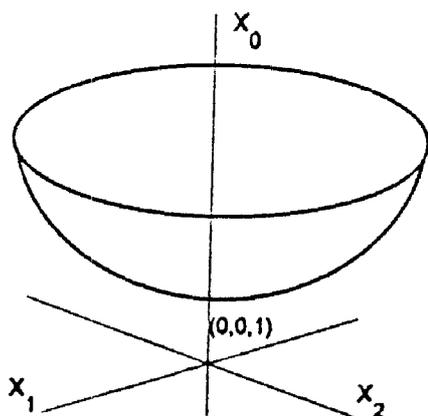
Im Sinne des Vergleichs der Geometrien  $\mathbb{H}_P^2$  und  $\mathbb{H}_K^2$  soll diese *Cayley-Abbildung* als  $\Phi_{P,L}$  bezeichnet werden, ihre inverse,  $z = -\frac{w+1}{w-1}$ , als  $\Phi_{L,P}$ . Da diese Cayley-Transformation, als Spezialfall einer Möbius-Transformation von  $\mathbb{C}$ , Kreise und Geraden wieder in Kreise und Geraden abbildet und auch winkeltreu ist, kann das Modell  $\mathbb{H}_P^2$  nun leicht beschrieben werden.

Die Punkte sind jene der offenen Halbebene, die Geraden sind (euklidische) Halbkreise mit Mittelpunkt auf der  $x$ -Achse, die Winkel zwischen Geraden sind die euklidischen Winkel zwischen diesen Kreisbögen. Alle anderen Elemente der Geometrie (einschließlich der Metrik) von  $\mathbb{H}_P^2$  lassen sich nun aus  $\mathbb{H}_L^2$  entsprechend übertragen.

### § 5 Das Modell $\mathbb{H}_W^2$

Auf den ersten Blick am ungewöhnlichsten wirkt dieses Modell, das gemäß [RE] wohl am besten Weierstraß zuzuschreiben ist. Der  $\mathbb{R}^3$  sei als  $(x_1, x_2, x_0)$ -Raum gege-

ben und man betrachte die obere Schale ( $x_0 > 0$ ) des 2-schaligen Hyperboloids:



$$\{(x_1, x_2, x_0) \mid x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = -1\} .$$

Die Punkte des Modells sind die Punkte dieser oberen Schale. Geraden im Modell sind die Schnitte der Schale mit Ebenen durch den Ursprung. Schwieriger als in den anderen Modellen ist hier die Beschreibung der Metrik. Wir fassen  $q(x_1, x_2, x_0) := -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$  als gegebene quadratische Form auf und ermitteln zunächst die zugehörige symmetrische Bilinearform. Es ist, für  $X := (x_1, x_2, x_0)$ ,  $Y := (y_1, y_2, y_0)$ .

$$p(X, Y) := \frac{1}{2}[q(X + Y) - q(X) - q(Y)] = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 .$$

Dann gilt  $q(X) = p(X, X)$  und  $q(X) = p(X, X) = -1$  für die Punkte der Schale. Somit ist  $-p$  positiv-definit auf derselben und es ist sinnvoll,

$$d(P, Q) := -p(P, Q)$$

für je zwei Punkte  $P$  und  $Q$  auf ihr zu setzen. Für 3 Punkte  $A, B, C$  auf einer Geraden, wobei  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt, gilt dann  $d(A, B) = d(A, C) + d(B, C)$ . Daraus kann, allgemein für 3 Punkte  $A, B, C$  auf der Schale, die Dreiecksungleichung für ihre Distanzen hergeleitet werden [RE].

Die Trägermenge des zu konstruierenden Modells ist nun diese Schale  $\{(x_1, x_2, x_0) \mid x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = -1, x_0 > 0\}$  mit der angegebenen Distanzfunktion. Das ist nun  $\mathbb{H}_W^2$ .

Die Beschreibung der zugehörigen Gruppe von Transformationen dieser Geometrie,  $G(\mathbb{H}_W^2)$ , fällt nun nicht schwer. Wir betrachten die Menge aller  $3 \times 3$ -Matrizen  $\varphi$  in  $GL(3, \mathbb{R})$ , welche die Form  $q$  (bzw.  $p$ ) invariant lassen:

$$q(\varphi(P)) = q(P) \text{ für alle } P \in \mathbb{H}_W^2 .$$

Das ist das Analogon der orthogonalen Gruppe (in bezug auf das „gewöhnliche“ innere Produkt). Diese Matrizen bilden die Gruppe  $G(\mathbb{H}_W^2)$ . Man kann diese lineare Gruppe auch als die Gruppe der  $3 \times 3$ -Matrizen beschreiben, welche mit der Matrix

$$\iota_0 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

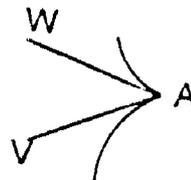
in der Relation  $\varphi^t \iota_0 \varphi = \iota_0$  stehen, wo  $\varphi^t$  die transponierte Matrix zu  $\varphi$  ist. Spezielle Elemente dieser Gruppe sind z.B. die Rotationen um  $(0, 0, 1)$ :

$$\varphi_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Jetzt soll die Winkelmessung in  $\mathbb{H}_W^2$  kurz beschrieben werden. Man stelle sich eine Gerade in  $\mathbb{H}_W^2$  vor, also den Schnitt von  $\{(x_1, x_2, x_0) \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0\}$  mit der Ebene  $ax_1 + bx_2 = cx_0$  durch  $(0, 0, 0)$ . Ihr Schnitt mit der oberen Schale des Hyperboloids ergibt eine Kurve (Gerade in  $\mathbb{H}_W^2$ ), deren Tangentialvektor  $T$  im Punkte  $P$  der Fläche sicher nicht innerhalb des Doppelkegels  $\{(x_1, x_2, x_0) \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$  verläuft, der  $\mathbb{H}_W^2$  „begrenzt“. Mit einer gewissen Normierung gilt also für jeden solchen Tangentialvektor  $T$ , daß  $q(T) = 1$ . Nun sei durch die Punkte  $BAC$  ein Winkel bei  $A$  mit den Schenkeln  $AB$  und  $AC$  definiert.

Als sein Winkelmaß setzen wir nun

$$\theta := \arccos p(V, W)$$



an, wobei  $V$  und  $W$  die Tangentialvektoren in  $A$  an  $AB$  bzw.  $AC$  sind. (Dazu muß zuerst gezeigt werden, daß  $|p(V, W)| \leq 1$ ).

Um das hier vorliegende Modell von  $\mathbb{H}_W^2$  mit den anderen vergleichen zu können, wird jetzt noch der Isomorphismus  $\Phi : \mathbb{H}_W^2 \rightarrow \mathbb{H}_K^2$  konstruiert, der dieses Modell mit dem Klein'schen verknüpft. Dazu verwenden wir einfach die perspektivische Abbildung aus  $(0, 0, 0)$ , bei der jeder Punkt von  $\mathbb{H}_W^2$  auf einen Punkt des Inneren der Kreisscheibe

$$\{(x_1, x_2, x_0) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_0 = 1\}$$

abgebildet wird. Klarerweise gehen dabei hyperbolische Geraden aus  $\mathbb{H}_W^2$  auf solche in  $\mathbb{H}_K^2$  über und es ist ebenso leicht einzusehen, daß die Abbildung eine Inverse besitzt.

Eine letzte Bemerkung: Setzt man als Perspektivitätszentrum nicht  $(0, 0, 0)$ , sondern den Punkt  $(0, 0, -1)$ , den „Südpol“ des Hyperboloids an, so kann man durch die entsprechende Variante der hyperbolisch-stereographischen Abbildung aus  $\mathbb{H}_W^2$  auch  $\mathbb{H}_L^2$  herleiten. Dieser Weg sei allen empfohlen, die an Darstellender Geometrie besonderes Interesse haben.

## § 6 Das Computer-Programm

Das Programm HYPERZOO realisiert die genannten vier Modelle der hyperbolischen ebenen Geometrie. Darüber hinaus ist es so konzipiert, daß es auch ein Modell der sphärischen, sowie der affinen ebenen Geometrie enthält.<sup>2</sup>

Dem Benutzer sollen mehrere Grafikfenster zur Verfügung gestellt werden, in denen die Objekte der oben genannten Geometrien definiert, in verschiedenen Modellen dargestellt und verändert werden können. Die Grafikfenster sind am Bildschirm beliebig positionierbar und sollen ihre Inhalte untereinander austauschen können. Fertig erstellte Grafiken können abgespeichert, ausgedruckt oder in die WINDOWS-Zwischenablage exportiert werden.

<sup>2</sup> Ein Modell der projektiven Ebene - PROJEKTIVER ZOO - wurde in einem Vortrag vorgestellt und ist nach etwas anderen Prinzipien gestaltet [GR].

Dem Anwender werden eine große Anzahl an Konstruktionen zur Auswahl stehen, wobei insbesondere auch die trigonometrischen Berechnungen ausführbar sind. Die den einzelnen Geometrien zugrundeliegenden Transformationen, die „Bewegungen“, werden ebenfalls bereitgestellt.

Weiters sind geplant: Schnittpunktberechnungen, Parametrisierung impliziter Gleichungen, Hauptachsentransformationen, Involuten-Berechnung.

Das Programm HYPERZOO entsteht derzeit in der objekt-orientierten Sprache TURBO-PASCAL für WINDOWS, da es den Nachfolger des in der gleichen Sprache geschriebenen Programms PROJZOO darstellt.

Die Entwicklungsarbeit läßt sich in drei große Bereiche einteilen:

- Bereitstellung einer komplex-projektiven Arithmetik und Funktionshandhabung
- Entwicklung und Implementation der mathematischen Grundlagen der einzelnen Geometrien
- Programmierung der Grafikoberfläche

Um die Behandlung des Funktionskalküls besonders in Bezug auf Singularitäten möglichst bequem zu gestalten, wurde eine komplexe Monom-Arithmetik definiert, die auch negative Wurzel-Operanden und unendlich große Zahlen verarbeiten kann. Diesem Vorteil steht aber eine verlangsamte Verarbeitungsgeschwindigkeit entgegen.

Die Funktionshandhabung arbeitet Pointer-orientiert und stellt dem Programmierer Parsing, Evaluation, Anzeige und Differentiation zur Verfügung.

Die Implementierung der geometrischen Konzepte der Punkte, Geraden, Dreiecke und Orbits geometrischer Bewegungen (z.B. Kreise) führte zu einer sauberen Trennung in drei Teile:

- 1: Die Definition einer Kurve auf einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit im Raum in einem wählbaren Koordinatensystem samt zugehöriger Kartenabbildung (z.B. Kugelkoordinaten).
- 2: Die Transformation des  $R^3$  in ein wählbares Modell (z.B. stereographische Projektion in eine Ebene).
- 3: Eine räumliche Drehung des Modells in einen sinnvollen Betrachtungswinkel zur Darstellung am Bildschirm.

## § 7 Beispiele aus HYPERZOO

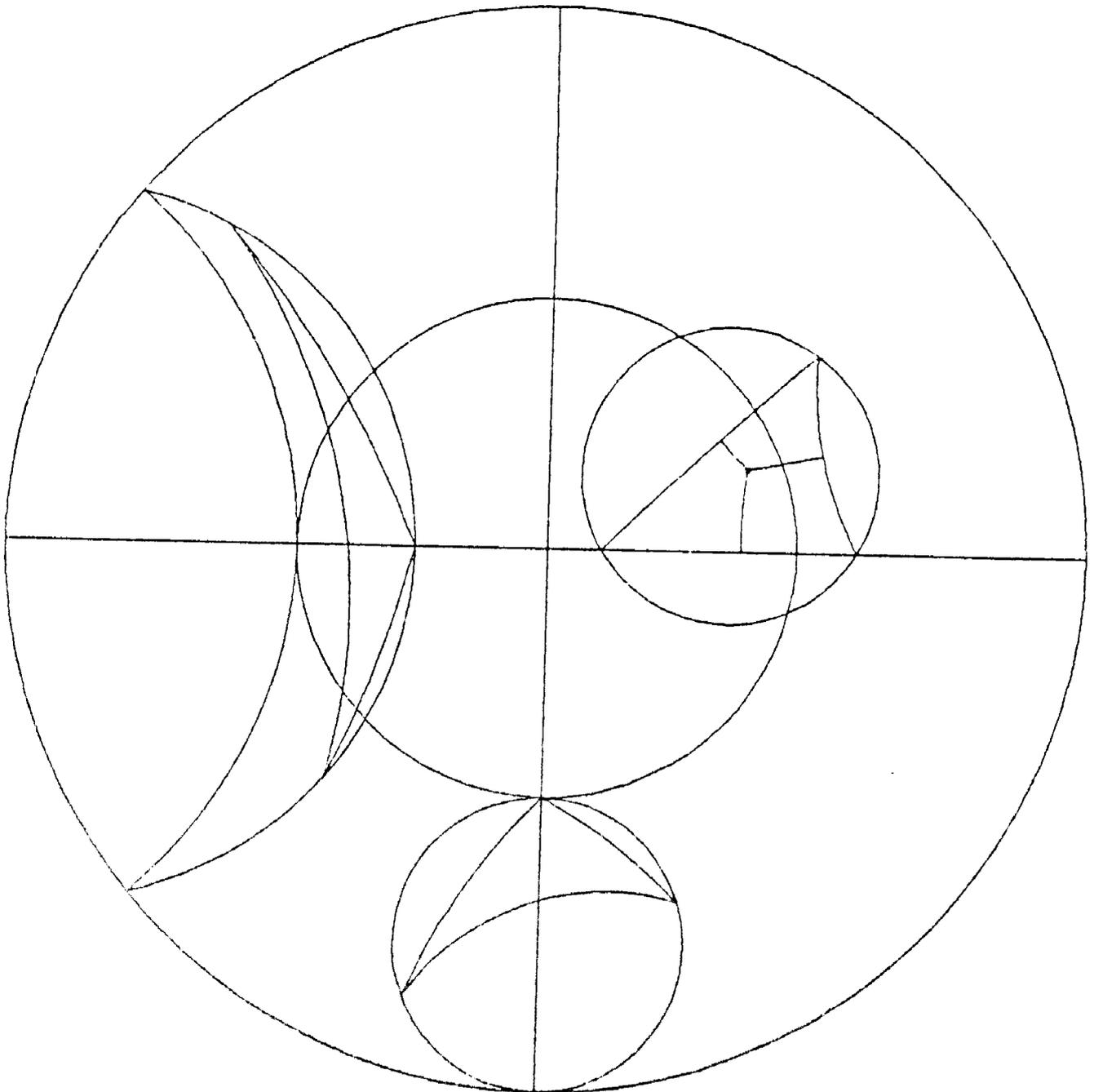
Im folgenden wird die Leistungsfähigkeit des Programms an sieben Beispielen demonstriert.

BEISPIEL 1. Im  $L$ -Modell gilt:

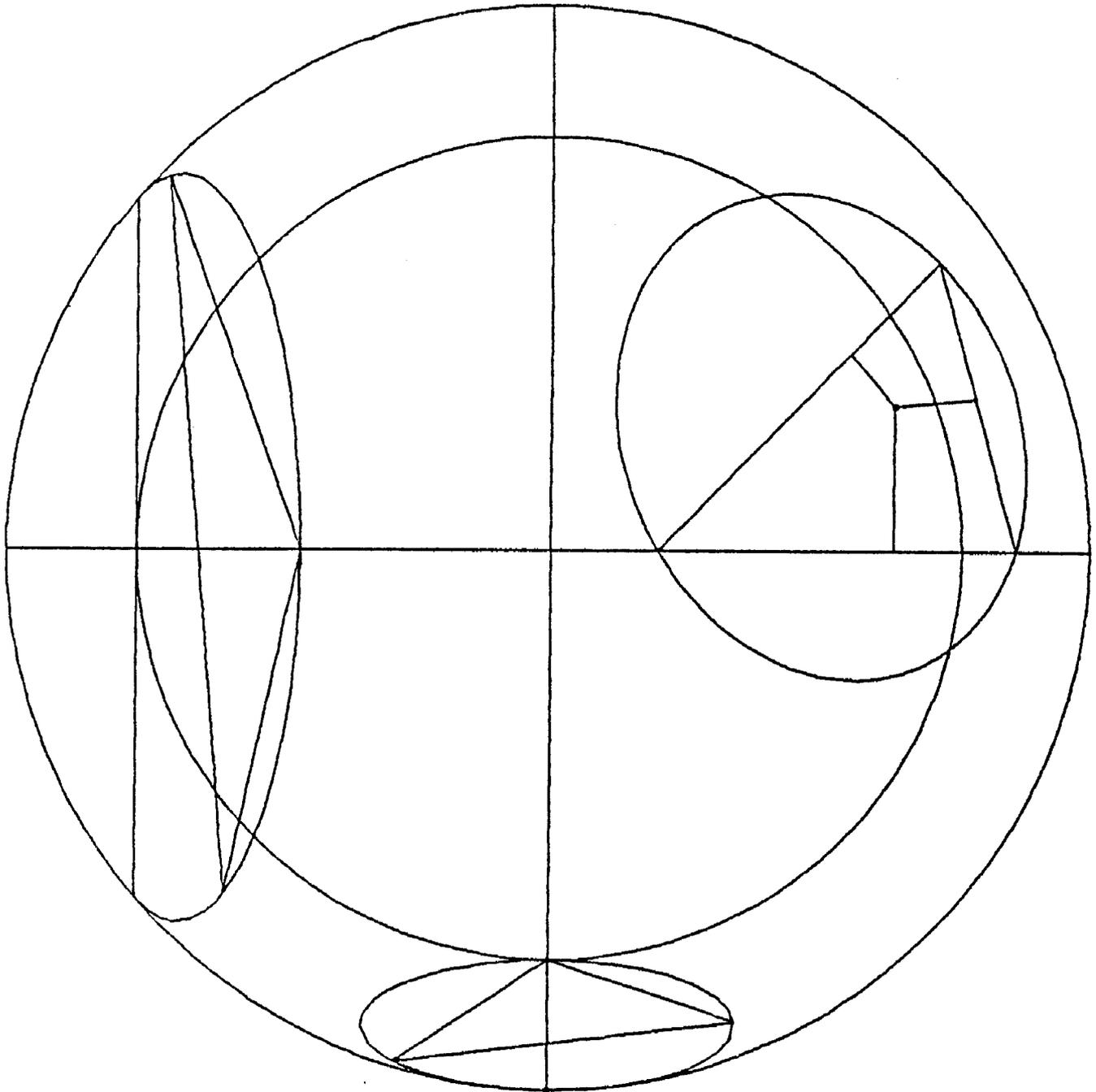
$\Delta 1$  hat einen (echten) Umkreis

$\Delta 2$  hat einen Um-Horozykel

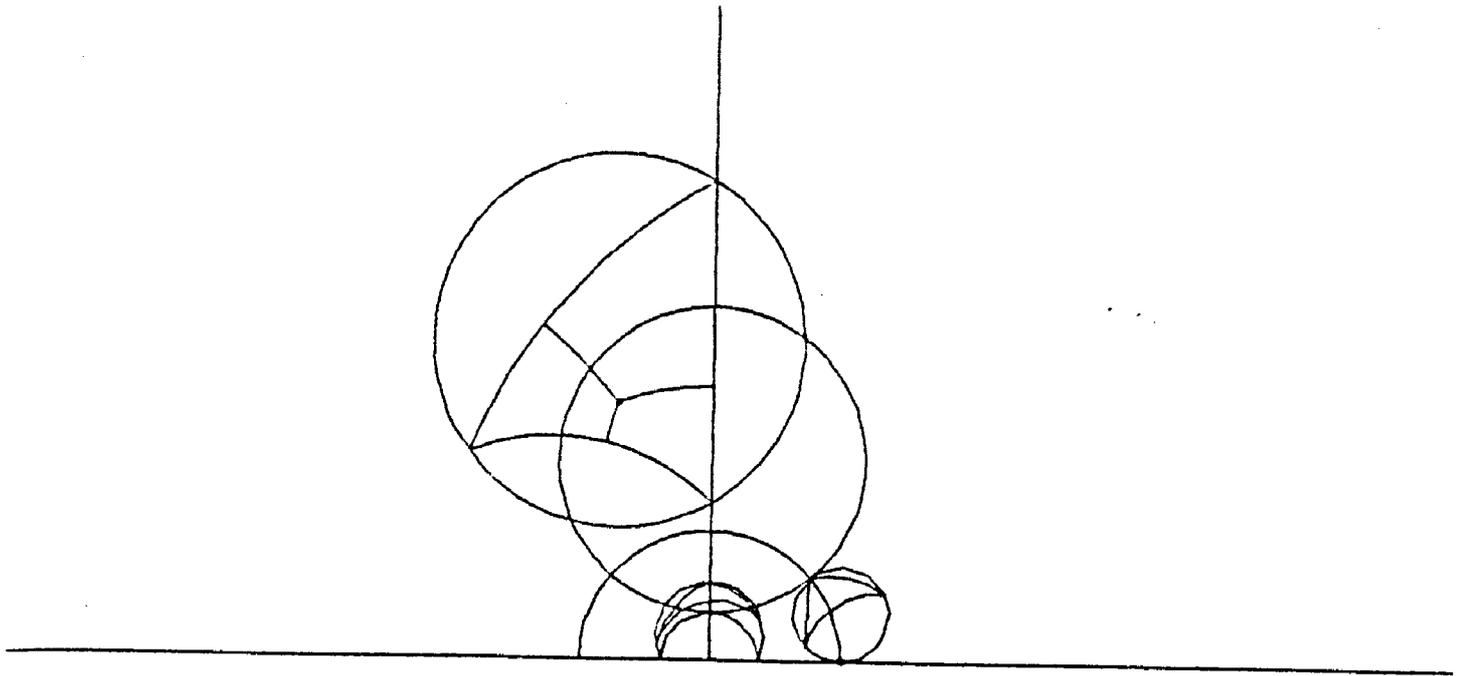
$\Delta 3$  hat eine Um-Abstandslinie



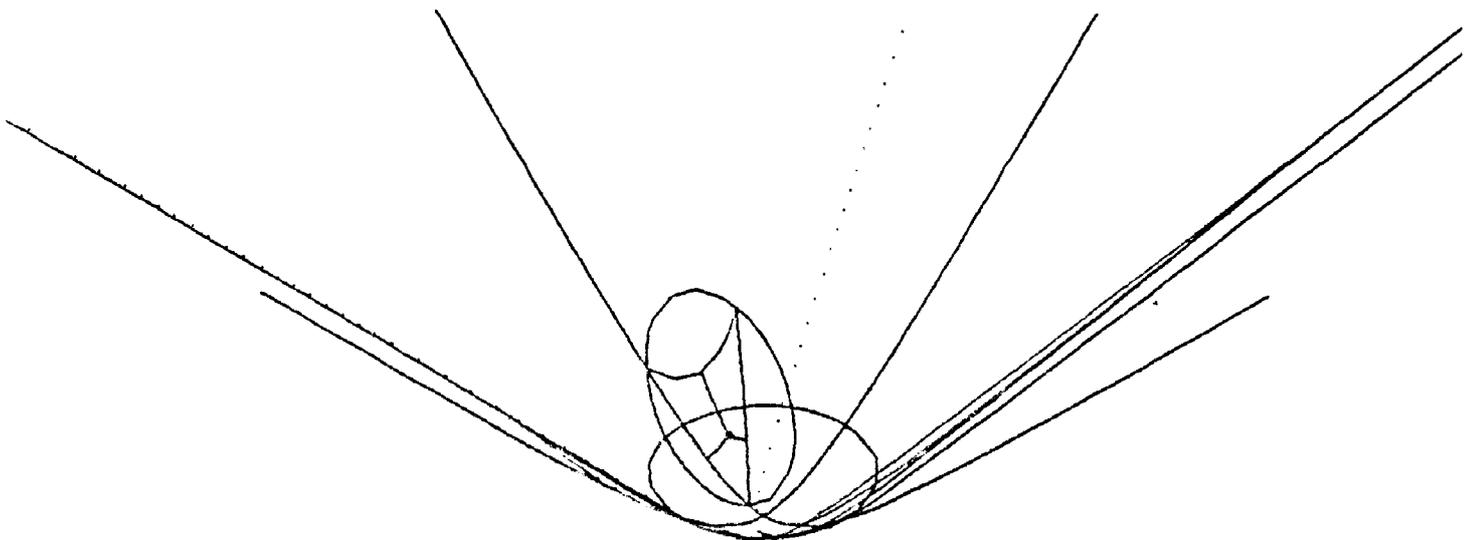
BEISPIEL 2.  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  sind im  $K$ -Modell dargestellt.



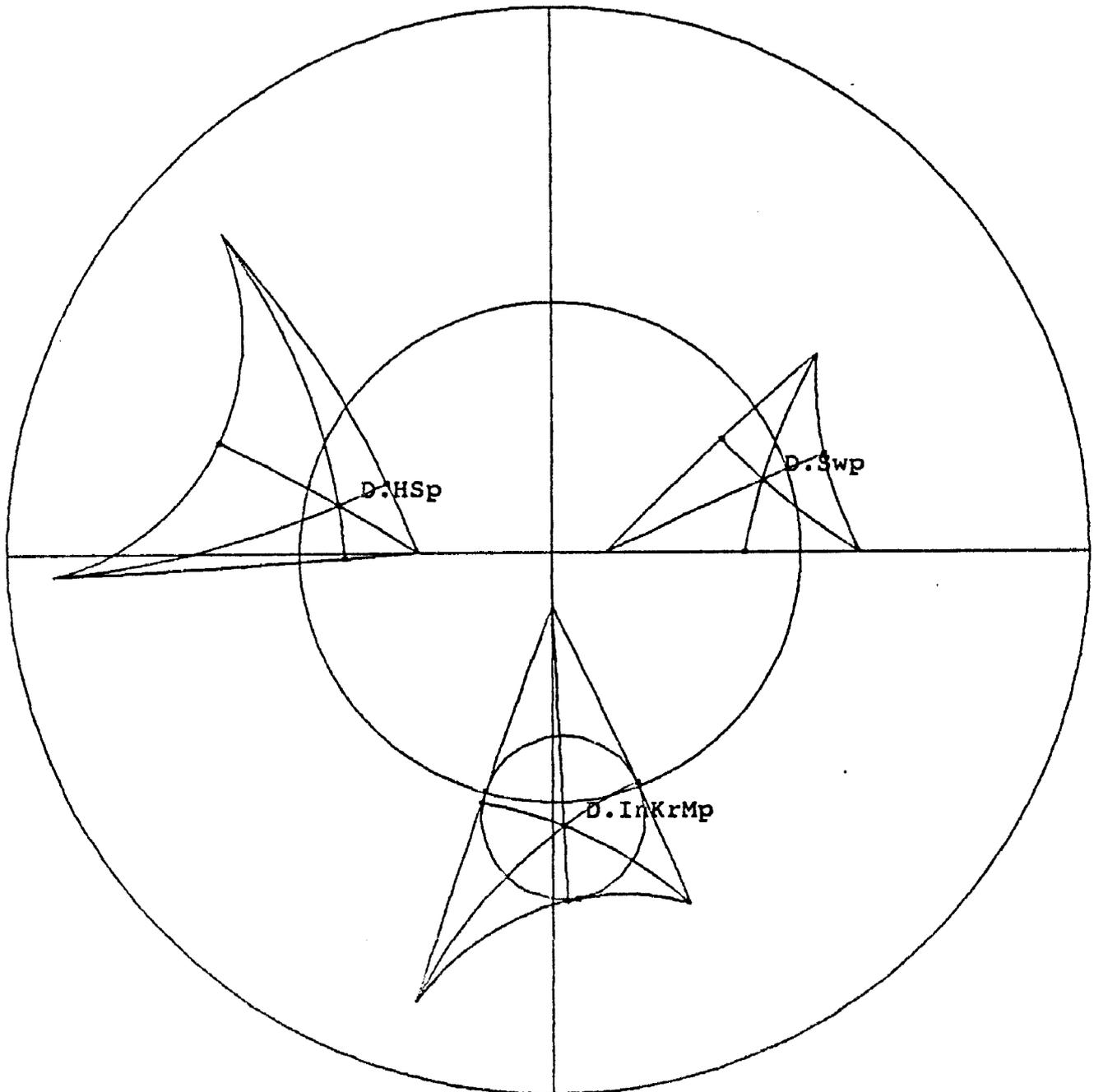
BEISPIEL 3.  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  sind im  $P$ -Modell dargestellt.



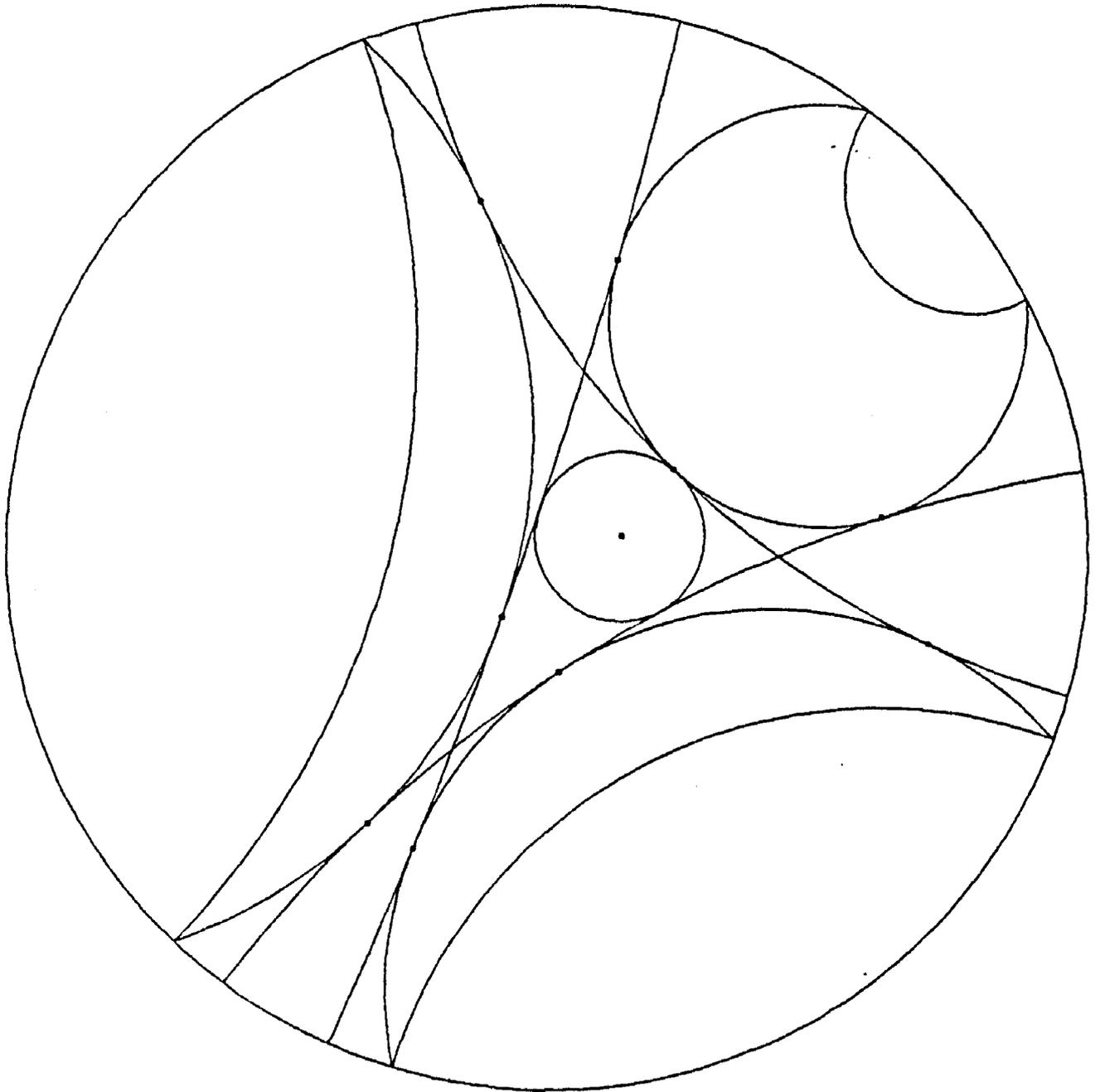
BEISPIEL 4.  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  sind im  $W$ -Modell dargestellt.



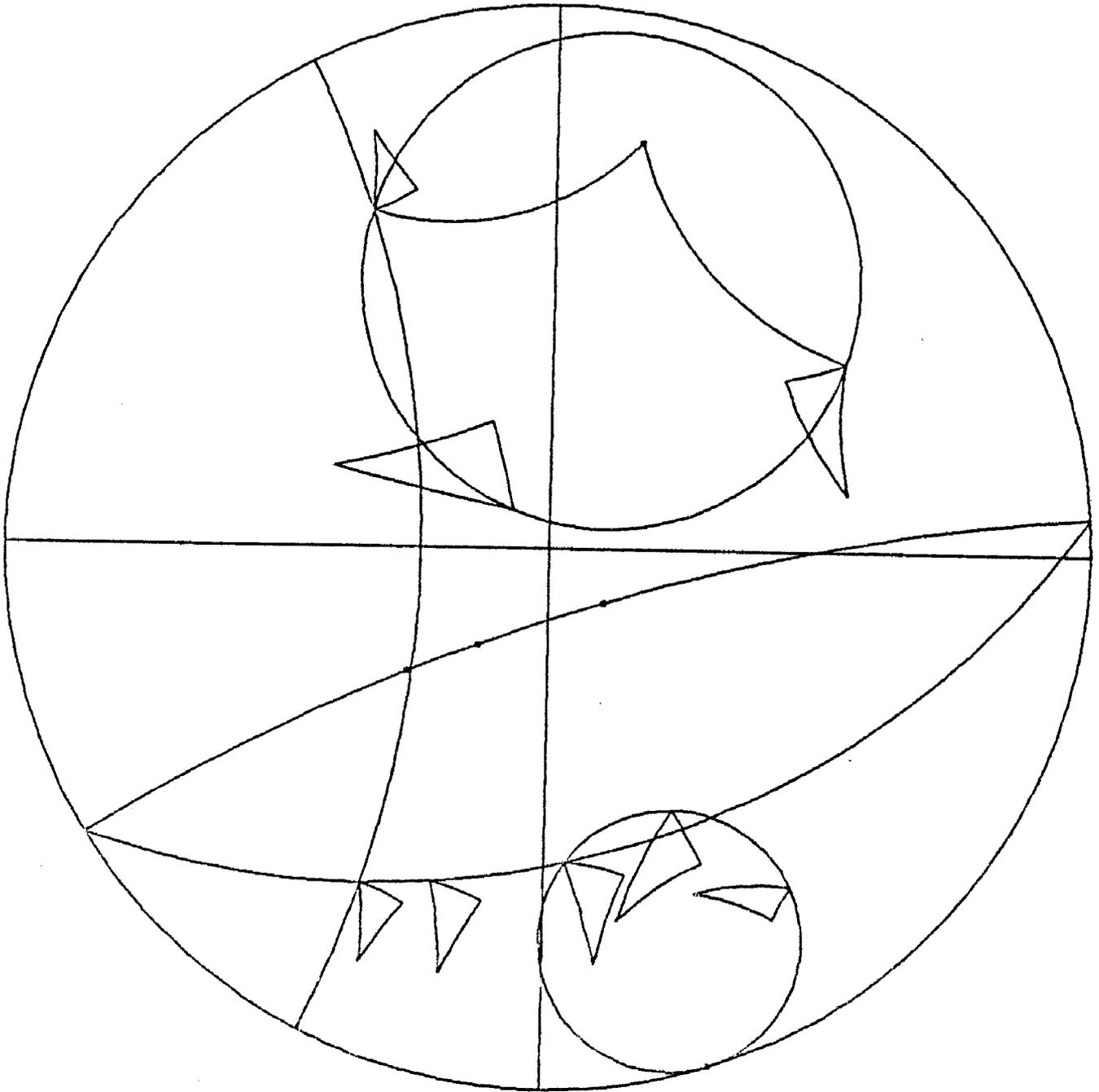
BEISPIEL 5. Für drei Dreiecke im *L*-Modell werden der Schwerpunkt (*Swp*), der Höhenschnittpunkt (*Hsp*) und der Inkreismittelpunkt (*Inkr.Mp*) ausgewiesen.



BEISPIEL 6. Inkreis und drei Ankreise an ein Dreieck im  $L$ -Modell — die Ankreise sind Abstandslinien.



BEISPIEL 7. Drehung, Spiegelung, Translation und Horolation eines Dreiecks im *L*-Modell.



## Literaturverzeichnis

- [GR] Grosser Siegfried, *Affine und proj. Geometrie am Computerbildschirm*, Didaktik-Reihe der ÖMG Nr. 21, S. 81-96.
- [HI] Hippmann, Gerald, *Modelle hyperbolischer Geometrien und Möglichkeiten ihrer computergraphischen Realisation*, Dissertation, Institut für Mathematik der Universität Wien, 1996.
- [IB] Iversen, Birger, *Hyperbolic geometry*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992 — XIV, 298 S.: graph. Darst. (London Mathematical Society student texts, 25).
- [LE] Lenz, Hanfried, *Nichteuklidische Geometrie*, Mannheim: Bibliogr. Inst., 1967 — 235 S.: zahlr. graph. Darst. (BI-Hochschultaschenbücher; 123/123a).
- [MO] Moise, Edwin E., *Elementary Geometry from an advanced standpoint*, 3. ed., Reading, Mass. [u.a.]: Addison-Wesley, 1990 — X, 502 S.: graph. Darst..
- [RE] Reynolds, William F., *Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid*, The American Mathematical Monthly, Vol. 100, N. 5, May 1993, p. 442-451.